

N.B.: nelle seguenti deduzioni sono state omesse le occorrenze finali di introduzione dell'implicazione

1. $A \vee \neg A$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \neg(A \vee \neg A) \end{array} \\
 \hline
 A \vee \neg A \quad \neg(A \vee \neg A) \\
 \hline
 \neg I (1) \\
 \hline
 \begin{array}{c} \neg A \quad 2 \\ \hline A \vee \neg A \end{array} \quad \neg(A \vee \neg A) \\
 \hline
 \neg E (2) \\
 \hline
 A \vee \neg A
 \end{array}$$

2. $\neg\neg A \rightarrow A$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ \neg A \end{array} \quad \neg\neg A \\
 \hline
 A \quad \neg E (1)
 \end{array}$$

3. $A \vee (A \rightarrow B)$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ \neg A \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \neg A \end{array} \\
 \hline
 \bot \quad \neg I \\
 \hline
 \bot \quad \neg E \\
 \hline
 B \quad \rightarrow I (1) \\
 \hline
 A \rightarrow B \quad \vee I \\
 \hline
 A \vee (A \rightarrow B) \quad \neg(A \vee (A \rightarrow B)) \quad 3 \\
 \hline
 \neg E (2) \\
 \hline
 A \\
 \hline
 A \vee (A \rightarrow B) \quad \neg(A \vee (A \rightarrow B)) \quad 3 \\
 \hline
 \neg E (3) \\
 \hline
 A \vee (A \rightarrow B)
 \end{array}$$

$$4. ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

(2)

$$\begin{array}{c}
 \frac{A^1 \quad \neg A^2}{\perp} \text{I} \\
 \frac{\perp}{B} \text{IE} \\
 \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A \quad A \rightarrow B}{A} \rightarrow \text{E} \quad \text{I}(1) \\
 \frac{A \quad \neg A^2}{A} \neg \text{E}(2)
 \end{array}$$

$$5. (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{B^1 \rightarrow \text{I} \quad A \rightarrow B \quad \neg(A \rightarrow B)^2}{\neg B} \neg \text{I}(1) \\
 \frac{\neg B \quad B^2}{\perp} \text{II} \\
 \frac{\perp}{A} \text{IE} \\
 \frac{A}{B \rightarrow A} \rightarrow \text{I}(2) \\
 \frac{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) \quad \neg((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))^3}{A \rightarrow B} \vee \text{I} \\
 \frac{A \rightarrow B \quad \neg((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))^3}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \neg \text{E}(2) \\
 \frac{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) \quad \neg((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))^3}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \vee \text{I} \\
 \frac{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) \quad \neg((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))^3}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \neg \text{E}(3)
 \end{array}$$

$$6. (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow B \quad A^1}{B} \rightarrow \text{E} \\
 \frac{B \quad \neg B^2}{\perp} \neg \text{I}(1) \\
 \frac{\perp}{\neg A} \text{IE} \\
 \frac{\neg A \quad \neg A \vee B}{\neg A \vee B} \vee \text{I} \\
 \frac{\neg A \vee B \quad \neg(\neg A \vee B)^3}{\neg A \vee B} \neg \text{E}(2) \\
 \frac{\neg A \vee B \quad \neg(\neg A \vee B)^3}{\neg A \vee B} \vee \text{I} \\
 \frac{\neg A \vee B \quad \neg(\neg A \vee B)^3}{\neg A \vee B} \neg \text{E}(3)
 \end{array}$$

7. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

$$\begin{array}{l}
 \frac{A^1}{(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A} \rightarrow I \\
 \frac{\neg A \quad \frac{A}{(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A} \rightarrow I \quad \neg((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)^3}{\neg A} \neg E(1) \\
 \frac{\neg A \quad \frac{A}{(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A} \rightarrow I \quad \neg((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)^3}{\neg A \rightarrow A} \rightarrow E \\
 \frac{A \quad \neg A \rightarrow A}{(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A} \rightarrow I(2) \\
 \frac{(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A \quad \neg((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)^3}{(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A} \neg E(3)
 \end{array}$$

8. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

$$\begin{array}{l}
 \frac{\neg B \rightarrow \neg A \quad \neg B^1}{\neg A} \rightarrow E \\
 \frac{\neg A \quad A}{B} \neg E(1)
 \end{array}$$

9. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

$$\begin{array}{l}
 \frac{A \wedge B^2}{A \wedge B} \wedge I \\
 \frac{\neg(A \wedge B) \quad A \wedge B}{\neg A} \neg I(1) \\
 \frac{\neg A \quad \neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B} \vee I \\
 \frac{\neg A \vee \neg B \quad \neg(\neg A \vee \neg B)^3}{\neg B} \neg I(2) \\
 \frac{\neg B \quad \neg A \vee \neg B}{\neg A \vee \neg B} \vee I \\
 \frac{\neg A \vee \neg B \quad \neg(\neg A \vee \neg B)^3}{\neg A \vee \neg B} \neg I(3)
 \end{array}$$

10. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (A \vee B)$

$$\begin{array}{l}
 \frac{\neg A \wedge \neg B^2}{\neg A \wedge \neg B} \wedge I \\
 \frac{\neg(\neg A \wedge \neg B) \quad \neg A \wedge \neg B}{\neg A} \neg E(1) \\
 \frac{\neg A \quad \neg(\neg A \wedge \neg B)}{A \vee B} \vee I \\
 \frac{A \vee B \quad \neg(A \vee B)^3}{\neg B} \neg E(2) \\
 \frac{\neg B \quad A \vee B}{A \vee B} \vee I \\
 \frac{A \vee B \quad \neg(A \vee B)^3}{A \vee B} \neg E(3)
 \end{array}$$

11. $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \wedge B$

$$\begin{array}{l}
 \frac{\neg A^1}{\neg A} \neg I \\
 \frac{\neg(\neg A \vee \neg B) \quad \neg A}{\neg A \vee \neg B} \neg E(1) \\
 \frac{\neg A \vee \neg B \quad \neg A \vee \neg B}{A} \neg I \\
 \frac{A \quad \neg(\neg A \vee \neg B)}{\neg B} \neg E(2) \\
 \frac{\neg B \quad A \vee \neg B}{A \vee \neg B} \vee I \\
 \frac{A \vee \neg B \quad \neg(A \vee \neg B)}{A \wedge B} \neg I
 \end{array}$$

12. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \wedge B$

$$\begin{array}{l}
 \frac{A^1 \quad \neg A^2}{\neg A} \neg I \\
 \frac{\neg A \quad \neg A}{\neg B} \neg E \\
 \frac{\neg B \quad A}{A \rightarrow \neg B} \rightarrow I(1) \\
 \frac{A \rightarrow \neg B \quad \neg(A \rightarrow \neg B)}{\neg B} \neg E(2) \\
 \frac{\neg B \quad A \rightarrow \neg B}{A \rightarrow \neg B} \rightarrow I(3) \\
 \frac{A \rightarrow \neg B \quad \neg(A \rightarrow \neg B)}{A \wedge B} \neg E(3)
 \end{array}$$